



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. A. Bashkirtseva, V. M. Nasyrova, L. B. Ryashko, I. N. Tsvetkov, Noise-induced intermittency and transition to chaos in the neuron Rulkov model, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, Volume 26, Issue 4, 453–462

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm160401>

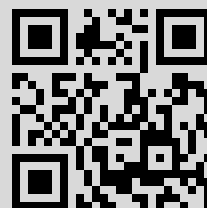
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 213.142.35.54

July 20, 2019, 10:54:57



УДК 51-76, 519.216

© И. А. Башкирцева, В. М. Насырова, Л. Б. Ряшко, И. Н. Цветков

ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ И ПЕРЕХОД К ХАОСУ В НЕЙРОННОЙ МОДЕЛИ РУЛЬКОВА¹

В статье исследуется дискретная модель нейрона, предложенная Рутьковым. В детерминированном варианте эта система моделирует различные режимы нейронной активности, такие как покой, тонический и хаотический спайкинг. В присутствии случайных возмущений в системе может наблюдаться еще один важный режим — берстинг, характеризующийся перемежаемостью участков покоя и возбуждения. В работе исследуются вероятностные механизмы индуцированных шумом переходов от покоя к берстингу в зоне касательной бифуркации. Показано, что такие переходы могут сопровождаться трансформацией динамики системы из регулярной в хаотическую. Для анализа этих бифуркационных явлений используются техника функций стохастической чувствительности и метод доверительных интервалов.

Ключевые слова: модель Рутькова нейронной активности, случайные возмущения, функция стохастической чувствительности, касательная бифуркация, индуцированные шумом переходы, стохастические бифуркации.

DOI: [10.20537/vm160401](https://doi.org/10.20537/vm160401)

Введение

Математическое моделирование и анализ нейронной активности в настоящее время привлекают внимание как биологов, так и математиков. В силу нелинейности даже простые модели нейронов демонстрируют сложные и разнообразные динамические режимы с регулярными и хаотическими аттракторами. Для анализа нейронных моделей активно используется современная теория бифуркаций [1, 2].

Важным свойством нейрона является его возбудимость — переход из покоящегося состояния к генерации большеамплитудных всплесков (спайков). В динамических моделях режимам покоя соответствуют устойчивые равновесия, а режиму возбуждения — периодические или хаотические автоколебания. Нейрон может демонстрировать и режим берстинга с перемежаемостью покоя и возбуждения.

В моделях с непрерывным временем берстинг возможен только в системах размерности три и выше (модели Хиндмарш–Розе, Ходжкина–Хаксли и др.). В классе моделей с дискретным временем режим берстинга может моделироваться системами меньшей размерности [3, 4].

В данной работе изучается концептуальная одномерная дискретная модель нейронной активности, предложенная Рутьковым в [5]. В детерминированном случае эта система моделирует режимы покоя, тонического и хаотического спайкинга. Режим берстинга возникает в этой системе лишь при добавлении в модель неизбежно присутствующих случайных возмущений. Целью данной работы является исследование вероятностного механизма стохастической генерации берстинга в зоне касательной бифуркации, где исходная детерминированная модель Рутькова демонстрирует переход от порядка к хаосу через перемежаемость. Такой сценарий перехода от порядка к хаосу в детерминированных моделях [6, 7] был обнаружен при исследовании механизмов перехода к турбулентности.

Анализ результатов воздействия случайных возмущений на режимы дискретных динамических систем проводился многими исследователями [8–10]. Исчерпывающее математическое описание плотностей вероятностных распределений в стохастических дискретных системах

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16–11–10098).

дается функциональным уравнением Перрона–Фробениуса, аналитическое решение которого доступно лишь в весьма частных случаях. Здесь конструктивным подходом является разработка подходящих асимптотик и аппроксимаций. В работах [11, 12] была предложена техника функций стохастической чувствительности для аппроксимации стохастических аттракторов дискретных нелинейных динамических систем. В данной работе на основе этой техники проводится параметрический анализ стохастических феноменов в нейронной модели Рулькова.

В параграфе 1 приводится описание динамики исходной детерминированной модели Рулькова в зоне, примыкающей к точке касательной бифуркации, где реализуется сценарий перехода от порядка к хаосу через перемежаемость.

Параграф 2 посвящен исследованию модели Рулькова под воздействием случайных возмущений. Здесь изучается явление индуцированного шумом берстинга в зоне, где исходная детерминированная модель имеет единственным аттрактором устойчивое равновесие. Для параметрического анализа этого явления используются техника функций стохастической чувствительности и метод доверительных интервалов.

В третьем параграфе показано, как генерация вызванного шумом берстинга сопровождается переходом от порядка к хаосу. Здесь обсуждается связь обнаруженных явлений со стохастическими P - и D -бифуркациями.

§ 1. Детерминированная модель Рулькова

Рассмотрим дискретную модель Рулькова [5]

$$x_{t+1} = \frac{\alpha}{1 + x_t^2} + \gamma, \quad (1)$$

где безразмерная переменная x описывает мембранный потенциал. Параметр $\alpha = 4.7$ зафиксирован, а параметр γ является управляющим.

При изменении параметра γ в системе (1) наблюдаются различные динамические режимы. На рис. 1, *a* представлена зависимость аттракторов системы (1) от параметра γ на интервале $-5 < \gamma < -2.5$. Обозначим $\gamma_1 = -4.754$, $\gamma_2 = -4.141$, $\gamma_3 = -2.908$.

На интервале $-5 < \gamma < \gamma_3$ у системы существует устойчивое равновесие \bar{x}_1 (нижняя сплошная линия на бифуркационной диаграмме рис. 1, *a*). При движении слева направо в точке γ_1 у системы появляется еще одно полуустойчивое равновесие, которое расщепляется на два равновесия: \bar{x}_2 и \bar{x}_3 . Равновесие \bar{x}_2 , лежащее между \bar{x}_1 и \bar{x}_3 , наблюдается на интервале $\gamma_1 < \gamma < \gamma_3$, где является неустойчивым (красная пунктирная линия на рис. 1, *a*).

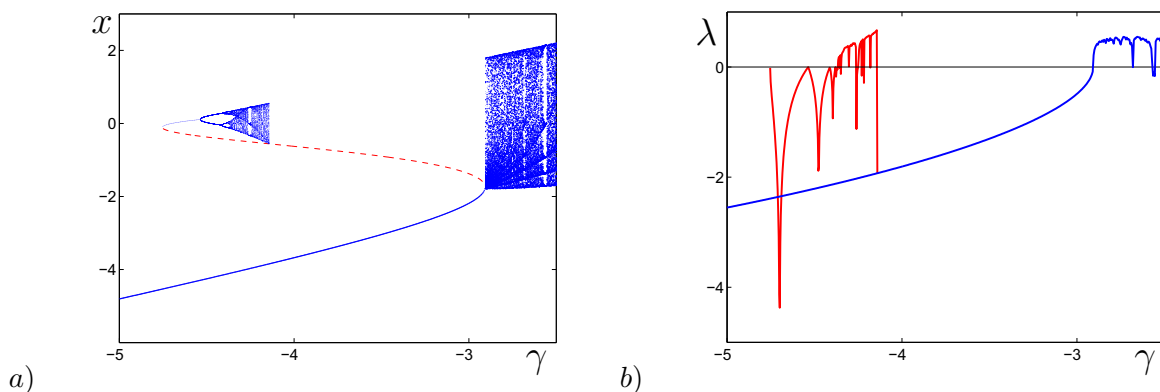


Рис. 1. Детерминированная модель Рулькова с $\alpha = 4.7$: *a*) бифуркационная диаграмма; *b*) показатели Ляпунова

Равновесие \bar{x}_3 дает начало дереву Фейгенбаума — каскаду бифуркаций удвоения периода с перемежаемостью зон порядка и хаоса. Соответствующие аттракторы этого дерева изображены на интервале $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. При переходе параметра γ через γ_2 хаотический аттрактор этого

дерева касается неустойчивого равновесия \bar{x}_2 и исчезает — в системе происходит бифуркация кризиса [13, 14].

На интервале $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ система имеет единственным аттрактором устойчивое равновесие \bar{x}_1 . При переходе через точку γ_3 в результате касательной бифуркации равновесия \bar{x}_1 , \bar{x}_2 сливаются и исчезают. Одновременно с этим в системе появляется новый хаотический аттрактор большой амплитуды.

Динамические характеристики аттракторов системы (1) — показатели Ляпунова — представлены на рис. 1, *b*. Здесь красным цветом показан ляпуновский показатель аттракторов дерева Фейгенбаума, а синим цветом — устойчивого равновесия \bar{x}_1 для $\gamma < \gamma_3$ и большеамплитудного аттрактора в зоне $\gamma > \gamma_3$. Динамика системы слева и справа от точки касательной бифуркации γ_3 наглядно иллюстрируется на рис. 2. Как видно, при $\gamma = -3$ существуют два пути к устойчивому равновесию \bar{x}_1 , являющемуся единственным аттрактором системы. Для начальных значений $x_0 < \bar{x}_2$ решение x_t монотонно стремится к \bar{x}_1 . При $x_0 > \bar{x}_2$ у решения сначала наблюдается переходный режим с колебаниями достаточно больших амплитуд, пока траектория не попадет наконец в зону $x_t < \bar{x}_2$ монотонной сходимости. Эти два типа поведения показаны на рисунке 2, *a*. Здесь неустойчивое равновесие \bar{x}_2 играет роль сепаратрисы, разделяющей эти два динамических режима.

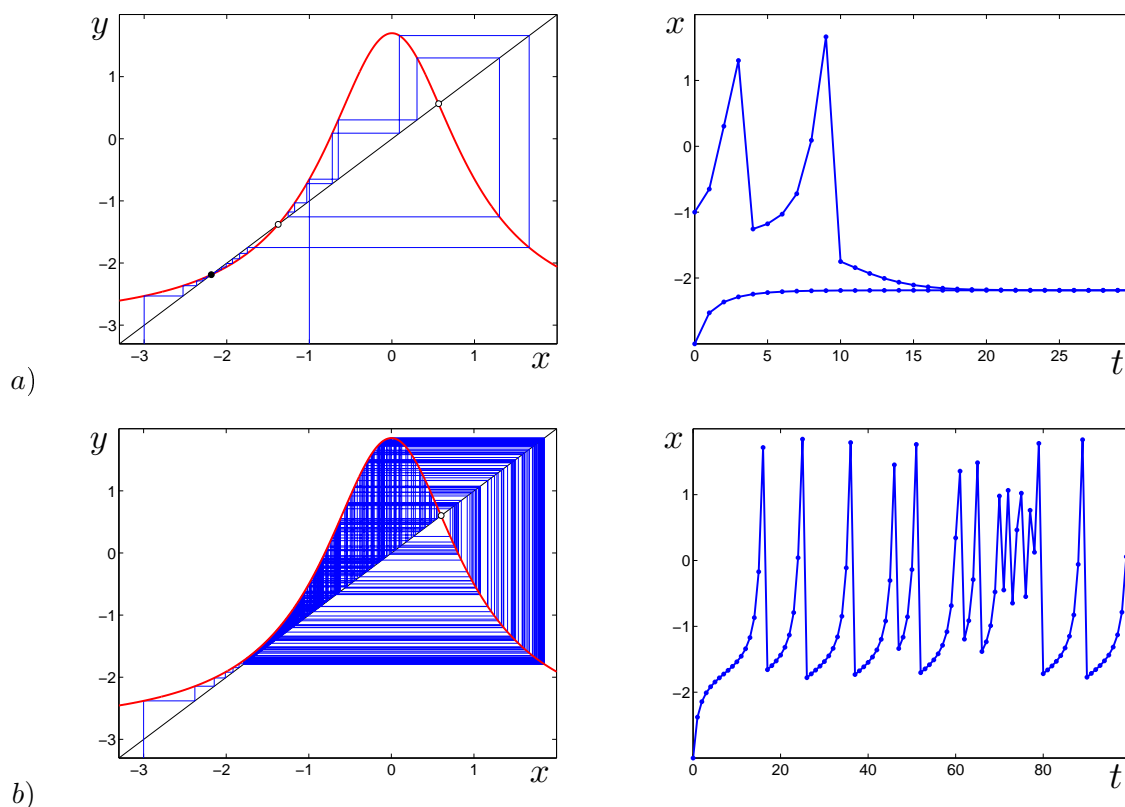


Рис. 2. Итерации и временные ряды детерминированной системы (1): *a*) для $\gamma = -3$; *b*) для $\gamma = -2.85$. Устойчивое равновесие показано черным кружком, а неустойчивые равновесия — пустыми кружками

Хаотическая динамика системы (1) при $\gamma = -2.85$ представлена на рис. 2, *b*. Здесь, независимо от начальных значений, решение системы совершает большеамплитудные хаотические осцилляции. Можно отметить, что здесь бифуркационная точка γ_3 разделяет два варианта нейронной активности: при $\gamma < \gamma_3$ нейрон находится в состоянии устойчивого покоя, а при $\gamma > \gamma_3$ нейрон находится в возбуждении с режимом хаотического спайкинга.

В следующем параграфе исследуется воздействие случайных возмущений на систему (1)

в окрестности точки касательной бифуркации γ_3 .

§ 2. Стохастическая модель Рулькова

Рассмотрим модель Рулькова со случайными возмущениями:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha}{1 + x_t^2} + \gamma + \varepsilon \xi_t. \quad (2)$$

Здесь случайные флуктуации управляющего параметра γ моделируются некоррелированным белым гауссовским шумом ξ_t с параметрами $E(\xi_t) = 0$, $E(\xi_t^2) = 1$, а ε — интенсивность этого шума.

Рассмотрим стохастическую динамику системы вблизи γ_3 при $\gamma < \gamma_3$. Здесь детерминированная система имеет единственным аттрактором устойчивое равновесие \bar{x}_1 . На рис. 3 изображены временные ряды для $\gamma = -2.95$ и разных значений интенсивности ε . При малых случайных возмущениях траектория слегка отклоняется от устойчивого равновесия \bar{x}_1 и совершает стохастические колебания малой амплитуды (см. траекторию для $\varepsilon = 0.05$, показанную красным цветом). При увеличении интенсивности возмущений происходит качественное изменение

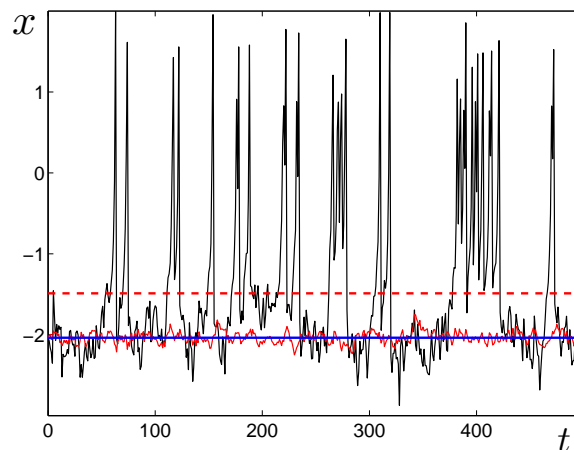


Рис. 3. Временные ряды стохастической модели Рулькова для $\gamma = -2.95$: при $\varepsilon = 0.05$ (красная сплошная линия); $\varepsilon = 0.2$ (черная линия); устойчивое равновесие (синяя линия); неустойчивое равновесие (пунктирная красная линия)

динамики системы. Когда интенсивность шума превосходит некоторое критическое значение, случайная траектория оказывается в зоне, расположенной за сепаратрисой \bar{x}_2 , где всплески значений амплитуды объясняются не столько действием случайных возмущений, сколько особенностями детерминированной динамики в этой зоне.

Действительно, в зоне $x_t > \bar{x}_2$ начинают наблюдаться стохастические колебания большой амплитуды, пока траектория не вернется в зону $x_t < \bar{x}_2$ с малоамплитудными осцилляциями. Такие стохастические переходы через сепаратрису \bar{x}_2 приводят к перемежаемости колебаний малых и больших амплитуд (см. на рис. 3 траекторию для $\varepsilon = 0.2$, показанную черным цветом). Этот динамический режим соответствует индуцированному шумом берстингу. Таким образом, несмотря на детерминированную устойчивость равновесия, модель Рулькова обладает высокой стохастической возбудимостью — важным свойством нейронной системы.

Детали перехода от малоамплитудных колебаний вокруг устойчивого равновесия к генерации стохастического берстинга показаны на рис. 4 для двух значений управляющего параметра. Как видно, чем ближе значение γ к точке касательной бифуркации $\gamma_3 = -2.908$, тем при меньшем шуме наступает генерация берстинга.

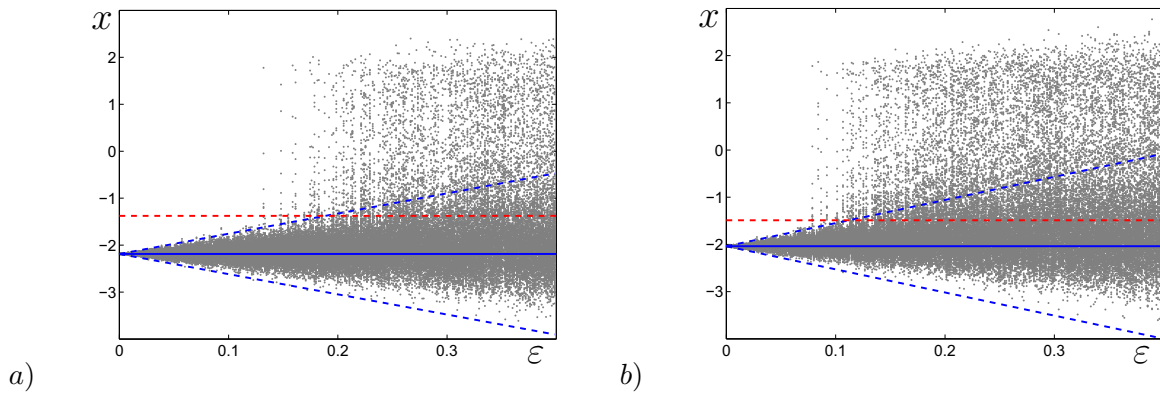


Рис. 4. Стохастическая система (2): а) для $\gamma = -3$; б) для $\gamma = -2.95$. Случайные состояния показаны серыми точками, устойчивое равновесие \bar{x}_1 — синей линией, неустойчивое равновесие \bar{x}_2 — пунктирной красной линией, границы доверительных интервалов — синими пунктирными линиями

В понимании вероятностного механизма индуцированного шумом берстинга следует учитывать два обстоятельства: стохастическую чувствительность равновесия \bar{x}_1 к случайным возмущениям и удаленность этого равновесия от сепаратрисы \bar{x}_2 .

Функция стохастической чувствительности w устойчивого равновесия \bar{x} общей одномерной стохастической системы

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t$$

задается явной формулой [12]

$$w = \frac{\sigma^2(\bar{x})}{1 - (f'(\bar{x}))^2}.$$

Для устойчивого равновесия \bar{x}_1 модели Рутькова (2) мы имеем

$$w = \frac{(1 + \bar{x}^2)^4}{(1 + \bar{x}^2)^4 - 4\bar{x}^2\alpha^2}.$$

Используя значения w и ε , мы можем построить гауссовскую аппроксимацию стационарной плотности распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w \varepsilon}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2w \varepsilon^2}\right)$$

и найти границы доверительного интервала $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$: $\tilde{x}_{1,2} = \bar{x} \pm k \varepsilon \sqrt{2w}$. Здесь коэффициент k связан с доверительной вероятностью P формулой $k = \text{erf}^{-1}(P)$, где

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

— функция ошибок. Теория функций стохастической чувствительности была разработана в [11, 12, 15] и применена к анализу широкого круга нелинейных стохастических феноменов [16–18].

На рис. 4 границы доверительных интервалов изображены синим пунктиром. Данный подход позволяет оценить критическое значение ε^* интенсивности шума, приводящего к генерации стохастического берстинга. В качестве такого значения естественно взять интенсивность шума, при котором верхняя граница доверительного интервала \tilde{x}_2 пересекается с сепаратрисой \bar{x}_2 :

$$\varepsilon^* = \frac{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}{2k\sqrt{w}}.$$

Полученная формула позволяет аналитически учесть взаимосвязь между критической интенсивностью шума, расстоянием между аттрактором и сепаратрисой, а также стохастической чувствительностью аттрактора.

Как видим, в исследовании стохастической генерации берстов в модели Рулькова, аналитический подход, основанный на технике стохастической чувствительности, хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования.

§ 3. Стохастические бифуркации в модели Рулькова.

Индукцированный шумом хаос

Рассмотрим, как полученные здесь результаты связаны со стохастическими бифуркациями. В теории стохастических бифуркаций традиционно выделяют так называемые P - и D -бифуркации [14]. Феноменологические P -бифуркации отражают преобразования стохастической динамики, соответствующие качественным изменениям формы стационарной плотности распределения.

Рассмотрим, как может меняться форма стационарной плотности распределения в модели Рулькова при увеличении шума вблизи точки касательной бифуркации γ_3 , при $\gamma < \gamma_3$, где исходная детерминированная система имеет единственным аттрактором устойчивое равновесие \bar{x}_1 .

При малых шумах случайные состояния концентрируются около этого равновесия \bar{x}_1 (см. рис. 3, 4). Стационарная плотность распределения этих состояний при $\gamma = -2.95$ и $\varepsilon = 0.05$ изображена на рис. 5, а. Здесь график функции $p(x)$ унимодален и имеет достаточно узкий и высокий пик над точкой $\bar{x}_1 = -2.04$.

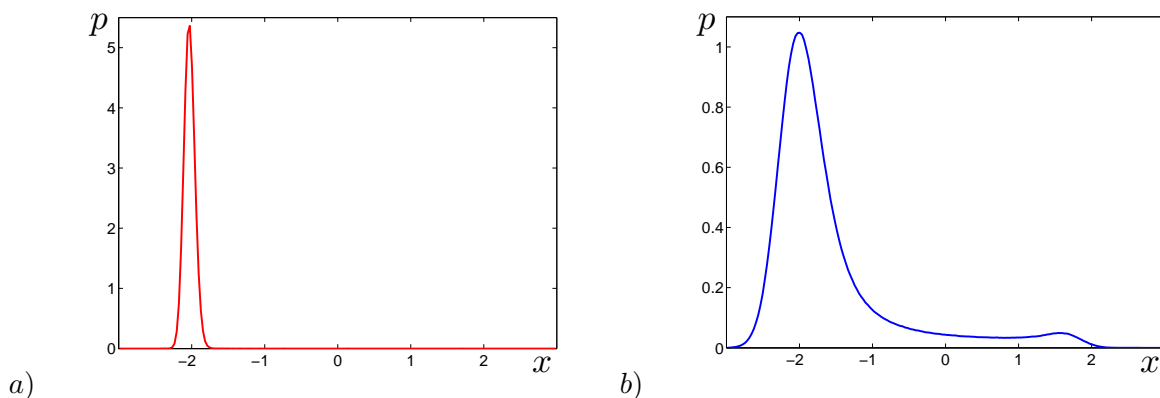


Рис. 5. P -бифуркация в стохастической модели Рулькова с $\gamma = -2.95$: а) при $\varepsilon = 0.05$; б) при $\varepsilon = 0.2$

При увеличении шума, когда в системе начинается генерация большеамплитудных берстовых колебаний, стационарная плотность меняется: наряду с естественным увеличением дисперсии у графика $p(x)$ появляется дополнительный пик в зоне, достаточно удаленной от устойчивого равновесия \bar{x}_1 (см. рис. 5, б для $\gamma = -2.95$ и $\varepsilon = 0.2$). Таким образом, переход к берстовым колебаниям в модели (2) сопровождается стохастической P -бифуркацией преобразования стационарной плотности из унимодальной в бимодальную.

Плотность распределения характеризует геометрическое расположение состояний стохастической системы. Наряду с плотностью распределения представляет интерес и другая характеристика динамики решений — показатель Ляпунова λ . Если $\lambda < 0$, то наблюдается сходимость траекторий и динамика системы классифицируется как регулярная. В случае $\lambda > 0$ траектории расходятся и в системе наблюдается хаос. Таким образом, смена знака показателя Ляпунова является общепринятым критерием перехода от порядка к хаосу. В стохастических системах такая смена знака соответствует D -бифуркации.

Рассмотрим, как меняется показатель Ляпунова в стохастической модели Рулькова при увеличении шума вблизи точки касательной бифуркации γ_3 .

Детальная зависимость показателя Ляпунова от интенсивности шума ε для трех фиксированных значений параметра γ показана на рисунке 6, а. Как видим, увеличение шума ведет

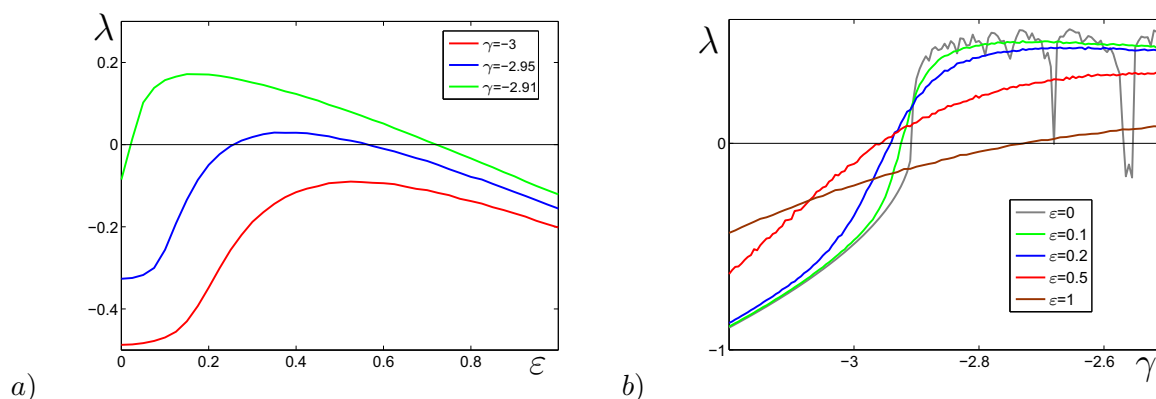


Рис. 6. Показатели Ляпунова стохастической модели (2): *a)* в зависимости от интенсивности шума ε ; *b)* в зависимости от параметра γ

к росту λ . При значениях $\gamma = -2.91$ и $\gamma = -2.95$, весьма близких к бифуркационному значению γ_3 , это приводит к тому, что λ меняет знак и становится положительным. В системе происходит D -бифуркация с трансформацией динамики из регулярной в хаотическую. С дальнейшим ростом ε происходит обратный переход: показатель λ вновь становится отрицательным. Таким образом, вблизи точки бифуркации γ_3 наблюдаются индуцированные шумами переходы «порядок» \rightarrow «хаос» \rightarrow «порядок».

Дополнительные подробности таких переходов можно увидеть на рисунке 6, *b*, где показана зависимость показателя Ляпунова от параметра системы γ при фиксированных значениях ε . Как видно, увеличивающийся шум сначала сдвигает точку D -бифуркации влево от γ_3 , а затем начинает перемещать ее вправо.

В заключение можно подчеркнуть, что рассмотренная в работе простая одномерная дискретная система Рутькова позволяет моделировать достаточно сложные режимы нейронной динамики, возникающие в присутствии случайных возмущений. Отметим, что предложенные методы исследования (техника функций стохастической чувствительности и доверительные области) применимы к изучению новых стохастических феноменов и в более сложных многомерных моделях нейронной активности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Izhikevich E.M. Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. Cambridge: MIT Press, 2007. 497 p.
2. Kuznetsov Yu.A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 2004. 632 p. DOI: [10.1007/978-1-4757-3978-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7)
3. Ibarz B., Casado J.M., Sanjuan M.A.F. Map-based models in neuronal dynamics // Physics Reports. 2011. Vol. 501. Issues 1–2. P. 1–74. DOI: [10.1016/j.physrep.2010.12.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.12.003)
4. Girardi-Schappo M., Tragtenberg M.H.R., Kinouchi O. A brief history of excitable map-based neurons and neural networks // Journal of Neuroscience Methods. 2013. Vol. 220. Issue 2. P. 116–130. DOI: [10.1016/j.jneumeth.2013.07.014](https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2013.07.014)
5. Rulkov N.F. Regularization of synchronized chaotic bursts // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. Issue 1. P. 183–186. DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.183](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.183)
6. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Communications in Mathematical Physics. 1980. Vol. 74. Issue 2. P. 189–197. DOI: [10.1007/BF01197757](https://doi.org/10.1007/BF01197757)
7. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1980. Vol. 1. Issue 2. P. 219–226. DOI: [10.1016/0167-2789\(80\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(80)90013-5)
8. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
9. Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A. Fluctuations and simple chaotic dynamics // Physics Reports. 1982. Vol. 92. Issue 2. P. 45–82. DOI: [10.1016/0370-1573\(82\)90089-8](https://doi.org/10.1016/0370-1573(82)90089-8)

10. Lasota A., Mackey M.C. Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics. New York: Springer-Verlag, 1994. 474 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-4286-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4286-4)
11. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Цветков И.Н. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17. № 6. С. 74–85.
12. Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. 2010. Vol. 17. P. 501–515.
13. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. Vol. 7. Issues 1–3. P. 181–200. DOI: [10.1016/0167-2789\(83\)90126-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90126-4)
14. Arnold V.I., Afrajmovich V.S., И'яшенко Yu.S., Shil'nikov L.P. Dynamical systems. V. Bifurcation theory and catastrophe theory. Berlin–Heidelberg: Springer, 1994. DOI: [10.1007/978-3-642-57884-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57884-7)
15. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems // Physica A: Statistical Mechanics and its Application. 2014. Vol. 410. P. 236–243. DOI: [10.1016/j.physa.2014.05.037](https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.05.037)
16. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // Chaos. 2011. Vol. 21. Issue 4. 047514. DOI: [10.1063/1.3647316](https://doi.org/10.1063/1.3647316)
17. Bashkirtseva I., Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced oscillation bistability and transition to chaos in FitzHugh–Nagumo model // Fluctuation and Noise Letters. 2014. Vol. 13. Issue 01. 1450004. 16 p. DOI: [10.1142/S0219477514500047](https://doi.org/10.1142/S0219477514500047)
18. Ряшко Л.Б., Сысолятина А.А. Анализ стохастической динамики в дискретной макроэкономической модели Калдора // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 60–70. DOI: [10.20537/vm150107](https://doi.org/10.20537/vm150107)

Поступила в редакцию 27.09.2016

Башкирцева Ирина Адольфовна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: irina.bashkirtseva@urfu.ru

Насырова Венера Мирдиязовна, студент, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: foxvenera@gmail.com

Ряшко Лев Борисович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: lev.ryashko@urfu.ru

Цветков Иван Николаевич, младший научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: itsvet@el.ru

I. A. Bashkirtseva, V. M. Nasyrova, L. B. Ryashko, I. N. Tsvetkov

Noise-induced intermittency and transition to chaos in the neuron Rulkov model

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 453–462 (in Russian).

Keywords: Rulkov model of neural activity, random perturbations, stochastic sensitivity function, tangent bifurcation, noise-induced transitions, stochastic bifurcations.

MSC2010: 39A50

DOI: [10.20537/vm160401](https://doi.org/10.20537/vm160401)

A discrete neuron model proposed by Rulkov is studied. In the deterministic version, this system simulates different modes of neural activity, such as quiescence, tonic and chaotic spiking. In the presence of random disturbances, another important mode of bursting characterized by the alternation of quiescence and excitement regimes can be observed. We study the probabilistic mechanisms of noise-induced transitions from quiescence to bursting in the zone of the tangent bifurcation. It is shown that such transitions are accompanied by a transformation of the system dynamics from regular to chaotic. For the analysis of these bifurcation phenomena, the stochastic sensitivity functions technique and method of confidence intervals are used.

REFERENCES

1. Izhikevich E.M. *Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting*, Cambridge: MIT Press, 2007, 497 p.
2. Kuznetsov Yu.A. *Elements of applied bifurcation theory*, New York: Springer, 2004, 632 p.
DOI: [10.1007/978-1-4757-3978-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7)
3. Ibarz B., Casado J.M., Sanjuan M.A.F. Map-based models in neuronal dynamics, *Physics Reports*, 2011, vol. 501, issues 1–2, pp. 1–74. DOI: [10.1016/j.physrep.2010.12.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.12.003)
4. Girardi-Schappo M., Tragtenberg M.H.R., Kinouchi O. A brief history of excitable map-based neurons and neural networks, *Journal of Neuroscience Methods*, 2013, vol. 220, issue 2, pp. 116–130.
DOI: [10.1016/j.jneumeth.2013.07.014](https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2013.07.014)
5. Rulkov N.F. Regularization of synchronized chaotic bursts, *Physical Review Letters*, 2001, vol. 86, issue 1, pp. 183–186. DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.183](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.183)
6. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Communications in Mathematical Physics*, 1980, vol. 74, issue 2, pp. 189–197. DOI: [10.1007/BF01197757](https://doi.org/10.1007/BF01197757)
7. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1980, vol. 1, issue 2, pp. 219–226. DOI: [10.1016/0167-2789\(80\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(80)90013-5)
8. Neimark Yu.I., Landa P.S. *Stokhasticheskie i khaoticheskie kolebaniya* (Stochastic and chaotic oscillations), Moscow: Nauka, 1987, 424 p.
9. Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A. Fluctuations and simple chaotic dynamics, *Physics Reports*, 1982, vol. 92, issue 2, pp. 45–82. DOI: [10.1016/0370-1573\(82\)90089-8](https://doi.org/10.1016/0370-1573(82)90089-8)
10. Lasota A., Mackey M.C. *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamic*, New York: Springer-Verlag, 1994, 474 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-4286-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4286-4)
11. Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Stochastic sensitivity of equilibrium and cycles for 1d discrete maps, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Prikladnaya Nelineinaya Dinamika*, 2009, vol. 17, no. 6, pp. 74–85 (in Russian).
12. Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 2010, vol. 17, pp. 501–515.
13. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, vol. 7, issues 1–3, pp. 181–200. DOI: [10.1016/0167-2789\(83\)90126-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90126-4)
14. Arnold V.I., Afrajmovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P. *Dynamical systems. V. Bifurcation theory and catastrophe theory*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1994. DOI: [10.1007/978-3-642-57884-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57884-7)
15. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems, *Physica A: Statistical Mechanics and its Application*, 2014, vol. 410, pp. 236–243.
DOI: [10.1016/j.physa.2014.05.037](https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.05.037)
16. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect, *Chaos*, 2011, vol. 21, issue 4, 047514. DOI: [10.1063/1.3647316](https://doi.org/10.1063/1.3647316)
17. Bashkirtseva I., Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced oscillation bistability and transition to chaos in FitzHugh–Nagumo model, *Fluctuation and Noise Letters*, 2014, vol. 13, issue 01, 1450004, 16 p.
DOI: [10.1142/S0219477514500047](https://doi.org/10.1142/S0219477514500047)
18. Ryashko L.B., Sysolyatina A.A. Analysis of stochastic dynamics in discrete-time macroeconomic Kaldor's model, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 60–70. DOI: [10.20537/vm150107](https://doi.org/10.20537/vm150107)

Bashkirtseva Irina Adol'fovna, Associate Professor, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: irina.bashkirtseva@urfu.ru

Nasyrova Venera Mirdizyanovna, Student, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: foxvenera@gmail.com

Ryashko Lev Borisovich, Professor, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: lev.ryashko@urfu.ru

Tsvetkov Ivan Nikolaevich, Junior Researcher, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: itsvet@el.ru